



.....للاطلاع و الاستفادة دوما معنا

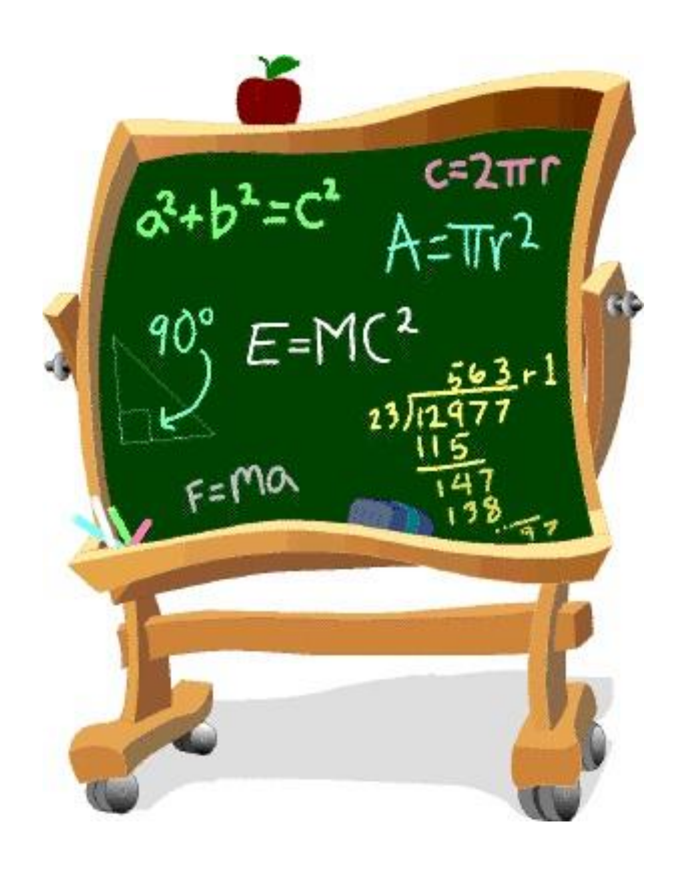
فلسفة الرياضيات

تمهيد:



طلب
المعرفة والفهم ميزة الإنسان بوصفه عاقلاً، ولكنّ المعارف عديدة (دينيّة،
فلسفيّة، علميّة...) إلاّ أنّ علماء المنهج المعاصرين يتّفقون بغالبيتهم
على تصنيف العلوم الوضعية في ثلاثة عناوين كبرى، غير منفصلة تمامًا عن بعضها البعض هي: الرياضية
والطبيعية والإنسانية.

مقدّمة:



تبدو
العلوم الرياضية للوهلة الأولى، مختلفة عن العلوم الأخرى. وإنّها تشكّل
عالمًا خاصًا ومستقلاً، يتعلّق بالعقل فقط دون العودة إلى الواقع الخارجي،
.فالبعض يعتبر أنّ الرياضيّ لا يحتاج في عمله إلاّ إلى لوح أسود وطبشورة
وتجدر الإشارة إلى صعوبة وضع تعريف للرياضيات، بسبب تعدّد فروعها وتنوّع
حقولها. ورغم ذلك يقول ديكارت "الرياضيات هي علم النظام والقياس". ففي
الواقع ليس هنالك علم رياضي بل علوم رياضية: فالحساب هو علم الأرقام، والجبر هو تجريد وتعميم للحساب،
.أمّا الهندسة فهي علم المقادير المتصلة

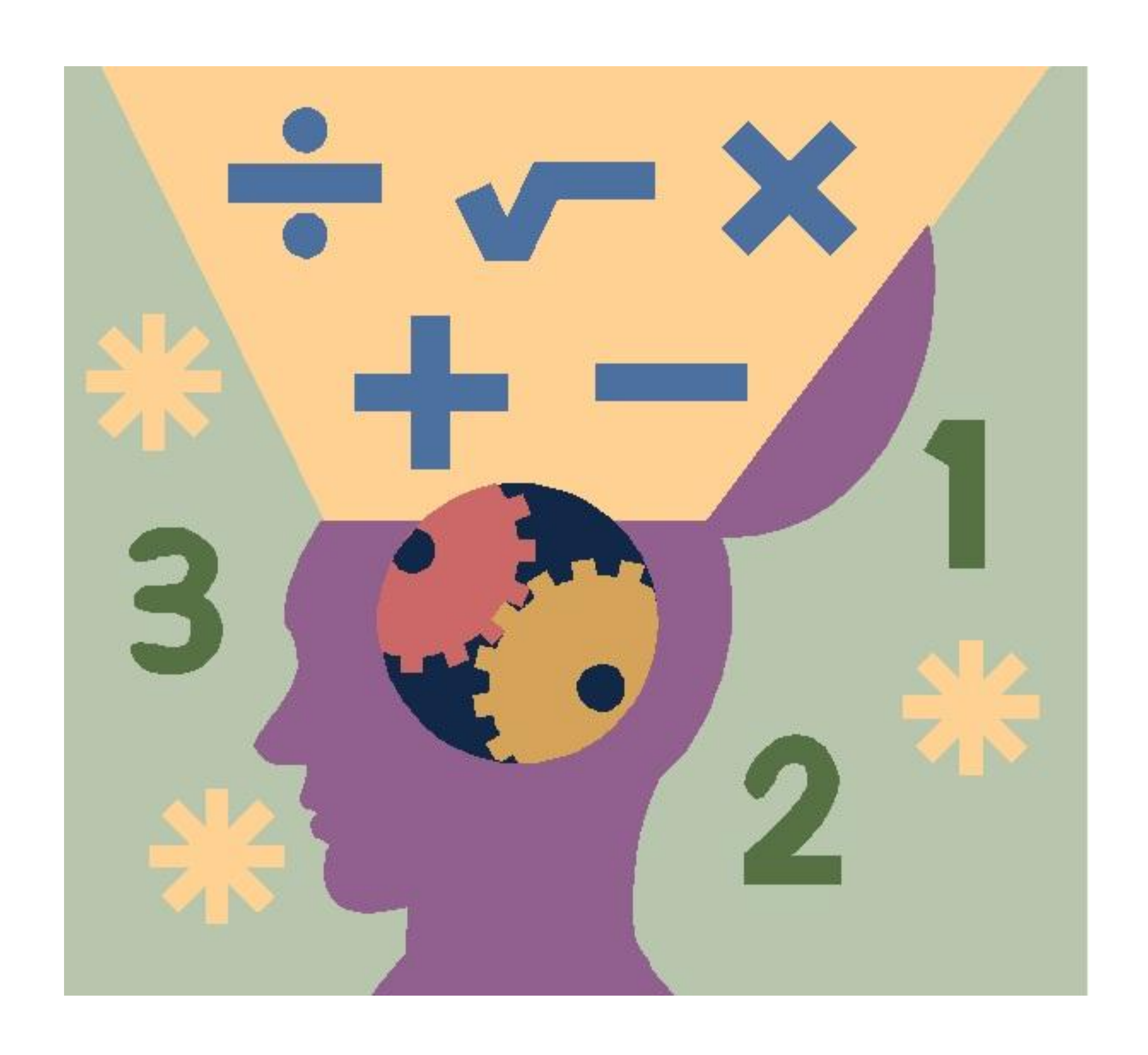
I. أصل الرياضيات:
هل الرياضيات نتيجة للتجربة الحسيّة، أم هي فكرية محض من صنع العقل؟
أ-النظرية التجريبية:



تعتبر
هذه النظرية أنّ الواقع يقدّم لنا أشكالاً محسوسة توحي بالمفاهيم
الرياضية. يقول ستيوارت ميل: أنّ النقاط والخطوط والدوائر التي يدركها
فالوقائع [b].العقل هي نسخ عن النقاط والخطوط والدوائر التي عرفها بالتجربة
والموضوعات هي التي مهدت لظهور المفاهيم الرياضية، فمن الأفق استوحى الفكر
الرياضي مفهوم الخط، ومن الشمس صدرت فكرة الدائرة، وعن جذع الشجرة ولد
وهذا .مفهوم الإسطوانة. كذلك فإن فكرة العدد جاءتنا من خلال إدراكنا لتعددية الموضوعات المحسوسة
التطابق ما بين الترميز الرياضي والواقع فسّره اتباع التجريب بأسبقية
التجربة على الواقع، وبكون المفاهيم الرياضية نسخًا عن المعطى الحسي
والتجريبي. وتظهر الرياضيات عند التجريبيين على أنّها علم إستقرائي، أي
أنّها حركة تصاعدية من الجزئيّ (المحسوس) إلى الكليّ (المعقول). وقد دافع
التجربيون عن موقفهم، فلو كانت

.الرياضيات علم عقلي (إستنتاجي) بحت لكانت ظهرت منذ وجود الإنسان على الأرض

:ب- النظرية العقلانيّة
(a priori) يرى بعض الفلاسفة المثاليون أن المفاهيم الرياضية هي مبادئ قبْلية
سابقة على التجربة ومستقلة عنها، فالعقل هو الذي ينتجها بغضّ النظر عن
.الوقائع. ويعتقد أفلاطون بوجود عالم مثالي أي عالم من الأفكار والجواهر
.إنه العالم الحقيقي حيث تسعى الموضوعات الواقعية الحسية إلى مماثلته



(Goblot) ويقول غوبلو

إذا كانت موضوعات العلوم التجريبية محكومة بقوانين تجريدية تستهدف تفسير ومعرفة الواقع، فإن الرياضيات من جهتها، هي معرفة مستقلة عن الوقائع، وليست بحاجة لأن تكون موضوعاتها واقعية لكي تكون صحيحة وواضحة. فالخط الذي نرسمه وكذا الدائرة، لا تتمتع بالكمال أما فكرة الخط وفكرة الدائرة فهما تابعتان لعالم الأفكار والجواهر، وهما أفكار رياضية كاملة حسبما يدعي أفلاطون. وقد أعطى العقليون براهين عدّة على صحّة نظريتهم، فاعتبروا أنّ المتعلّم لا يذهب إلى المختبر في حصص الرياضيات، كما أنّ في الرياضيات لا مكان للتجربة والملاحظة.

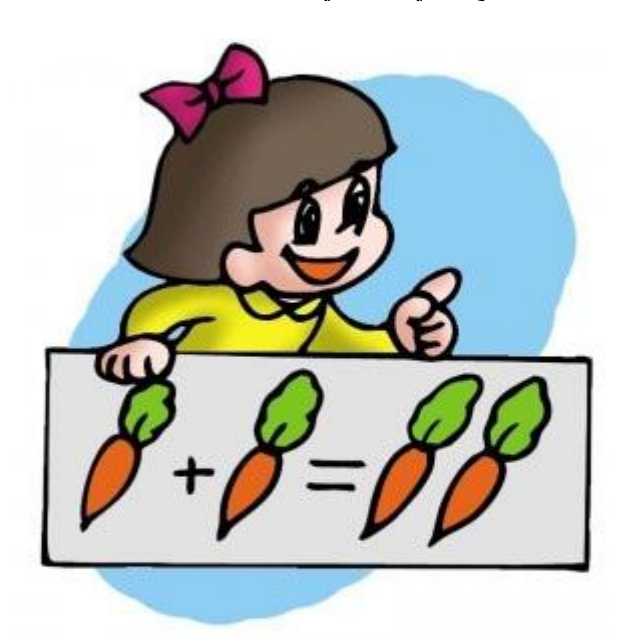
فالمفهوم

الرياضي هو الفكرة المكتملة التي يحتذي عالم الرياضيات حذوها ويشتغل في عملياته من خلالها. هذا يعني أن المفاهيم الرياضية موجودة في عالم مثالي محلق ومكتمل، ثم تأتي الموضوعات والأشكال الواقعية لتستوحي منها طابعها من.الرياضي

هذا المنطلق فإنّ الرياضيات تظهر على أنّها علم إستنتاجي، أي أنّها تبدأ بمقدّمات عامّة والوصول من خلال ربطها بقضايا أخرى إلى نتائج صادقة. ويكون معيار الصدق فيها عدم التناقض بين المقدمات والنتائج.

:ج- توليفة بين النظريتين

(Le caractèreopératoire) يعود الخطأ في النظريتين السابقتين إلى إهمال الجانب البنائي العملي
في الفكر الرياضي. فالرياضيات ليست انعكاسًا سلبيًا للوقائع المحسوسة
والتجريبية ولا هي انعكاس للفكر المجرد. إنها تُمثّل النشاط المبدع في الفكر
.الإنساني ومن المستحيل أن نفصل العمليات الرياضية عن الفكر أو عن التجربة
فالإتجاه العقلاني يغلط بجعله المفاهيم الرياضية محلقة في عالم مثالي
منقطع عن الواقع. فالرياضيات ليست علومًا عقلية خالصة بل هي متصلة بأصلها
الاختباري وبمطابقتها للعمليات الرياضية. فالمفاهيم والبديهيات الرياضية،
.وإن كانت ذات طابع عقلي وإبداعي، إلا إنها وثيقة الصلة بأصلها الحسي



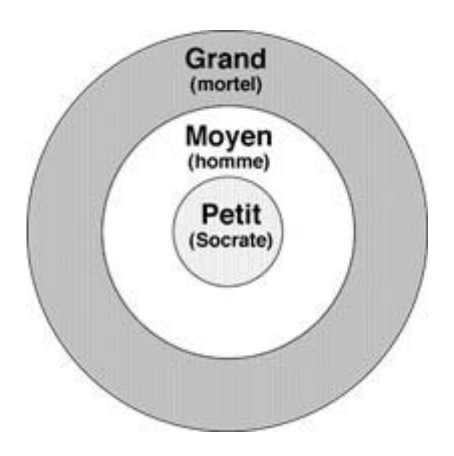
وبالفعل فإن العمليات الرياضية النظرية كانت في الأصل تقنيات عملانية محسوسة. فالهندسة كانت عملية
مسح للأراضي بطريقة القسمة التربيعية. والأعداد كانت مرتبطة بأعضاء الجسم
، أو III، أو المتوازية Vوخصوصًا الأيدي والأصابع. فالأعداد الرومانية هي على شكل الأصابع المنفرجة
كما .Xالمتقاطعة
أن حساب البيع كان يعتمد قديمًا على مماثلة كميات الأغراض بكميات من
.الحصى، فقد كانت كميات الحصى شواهد محسوسة على عمليات البيع بالحصى

بهذا
الشكل فإن الكائنات الرياضية ليست لا أشياء مدركة بالحس ولا أفكار متأملة
بالنظر العقلي. ولكنها أدوات تقنية وعملانية، أي أدوات صالحة لإجراء
فالعدد .العمليات
صفر على سبيل المثال لا يمثل شيئًا على أرض الواقع، مع ذلك لا غنى عنه في
والكسور والأعداد المتخيلة، (nb. négatives) العمليات الرياضية. كذلك هو الأمر بالنسبة للأعداد السلبية
.فهي جميعًا تمتاز بقدرتها على إجراء العمليات الرياضية

:البرهان المنطقي .II

الكلّ يتّفق على أنّ التفكير الرياضي هو أساسًا تفكير برهاني. والبرهان يقوم على مماثلة المعلوم بالمجهول
identification.
فعندما تتمّ هذه المماثلة، أو هذا التطابق يتمّ البرهان. هكذا تفعل، على
سبيل المثال، معاجم اللغة: فإنّي إذا كنت أجهل معنى كلمة ما؛ فإنّي أبحث
عنها في المعجم. فالمعجم يفسّرها، أي أنّه يضع ما يماثلها من كلمات معلومة،
.فالفهم لا يتمّ إذًا إلاّ إذا تمّ التماثل مع معلوم

:التالي Syllogismeنجد البرهان المنطقي واضحًا في القياس المنطقي الأرسطي الشهير



(كلّ إنسان هو مائت (المقدّمة الكبرى
(سقراط هو إنسان (المقدمة الصغرى
(إذًا سقراط هو مائت (النتيجة

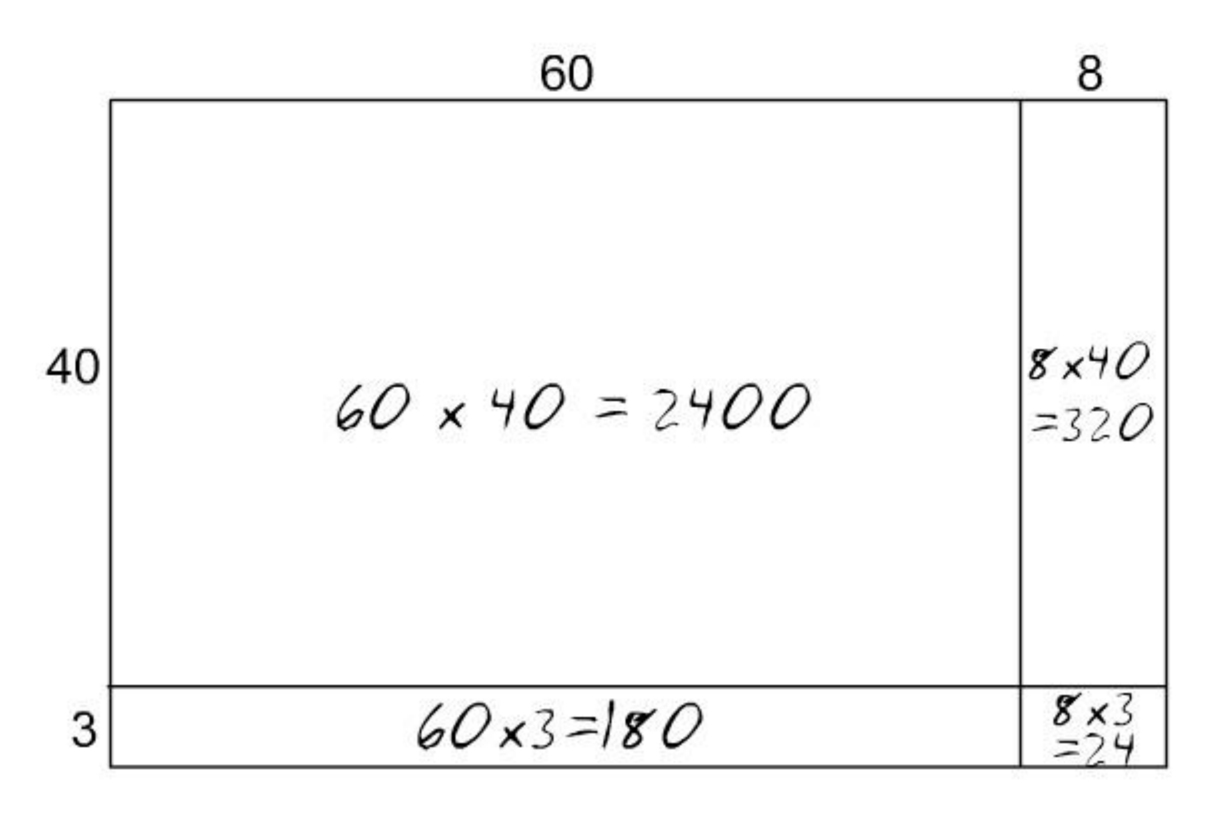
هذه
النتيجة ضرورية، أي أنّها لا يمكن أن تكون إلاّ ما هي، وليس شيئًا آخر؛
وكلّ نتيجة أخرى، غيرها، هي حكمًا خاطئة. فالتفكير يكون برهانيًا عندما
.تكون نتيجته ضرورية، أي عندما تكون نتيجته مماثلة للمقدّمات المعلومة

،inclusionإنّ ما يميّز القياس المنطقي هو أنّ نتيجته الضرورية تقوم على المماثلة والتضمين
وهي شبيهة بثلاث دوائر تدخل الصغرى ضمن الأكبر منها: فالدائرة الكبرى هي
مائت"، وضمن هذه الدائرة تقع دائرة "إنسان"، وضمن هذه الدائرة تقع دائرة "
سقراط" وهي الصغرى. هذا التضمين يعني: أنّ الأكبر يتضمّن الأصغر. وهكذا "
يكون القياس برهانًا إستنتاجيًا أو إستنباطيًا. وهذا يعني أنّ النتيجة
واقعة ضمن المقدمات، ولا تقول سوى ما هو موجود في المقدمات. لذا قيل عن هذا
.إذًا إنّ البرهان المنطقي عقيم، إذ لا يولّد حقائق جديدة .tautologiqueالقياس أنّه حشوي

:البرهان الرياضي .III

إنّ
التفكير الرياضي هو برهاني، كالتفكير القياسي المنطقي. ونتيجته هي دائمًا
ضرورية. ولكنّه بخلاف التفكير القياسي، لا يقتصر على عمليات التضمين وحدها،
:يمكننا أن نشبّه الرياضيات بالقياس، على النحو التالي .quantiteبل يتعدّاها إلى مختلف علاقات الكم

What is 68 x 43?



(إذا كانت أ = ب (مقدمة كبرى
(إذا كانت ب = ج (مقدمة صغرى
(إذًا أ = ج (نتيجة) (مع الإنتباه إلى أنّ أ، ب، ج هي أشمل من سقراط وإنسان ومائت

النتيجة

في الرياضيات، كما في القياس، هي ضرورية؛ وهي أيضًا برهانية، لأنّ البرهان الرياضي يقوم على ردّ المجهول الحاضر إلى معلوم مسبق. مثال ذلك أنّي إذا أردت أن أبرهن أنّ 4=2+2، لا بدّ لي من ردّ هذه القضية المجهولة إلى قضايا معلومة ومقبولة بأنها صحيحة، مثل:

.و3=2+1 والبرهنة هنا تقوم على ردّ كلّ عدد إلى مثيله المعروف 1+3=4

:ففي القضية الأولى، أستطيع أن أضع محل 3، مثيلها وهو: 2+1؛ وهكذا يكون معي

أو 4=2+(1+1) وبما إنّي أعرف سلفًا أنّ 1+1=2 1+(1+2) =4

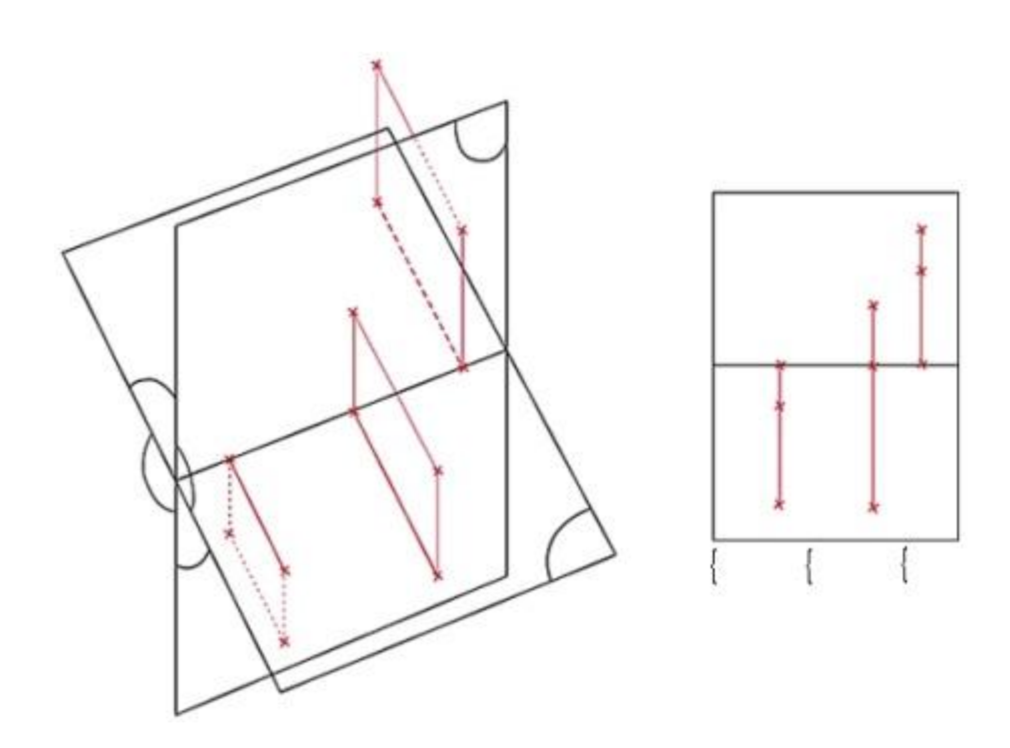
إذًا: 4=2+2 هذا يعني أنّ البرهان هنا ليس سوى مماثلة المجهول بالمعلوم. ولكن لنفترض أني لا أعرف مسبقًا أنّ: 4=3+1 و3=2+1 و2=1+1

فكيف يمكنني، والحالة هذه، أن أبرهن أنّ 4=2+2؟

الجواب: إنّ هذا البرهان لا يعود ممكنًا، بل يصبح مستحيلاً؛ لأنّه ليس بإمكاني هنا أن أردّ المجهول إلى معلوم،

إذ لا معلوم لديّ!

IV. المبادئ الرياضية:



لقد رأينا في الرياضيات أنّني أبرهن قضية مجهولة بردّها إلى قضية معلومة. ولكن إذا طُلب منّي أن أبرهن هذه القضية الأخيرة، فلا بدّ لي من إرجاعها إلى قضية معلومة قبلها... وهكذا دواليك، "بسلسلة من الأفكار". ولكن أين تنتهي هذه السلسلة؟ الجواب: لا بدّ لها من أن تنتهي إلى حقائق معلومة قبلها! وإذ أنّ لا حقائق قبلها، فهي إذًا غير قابلة للرهان.

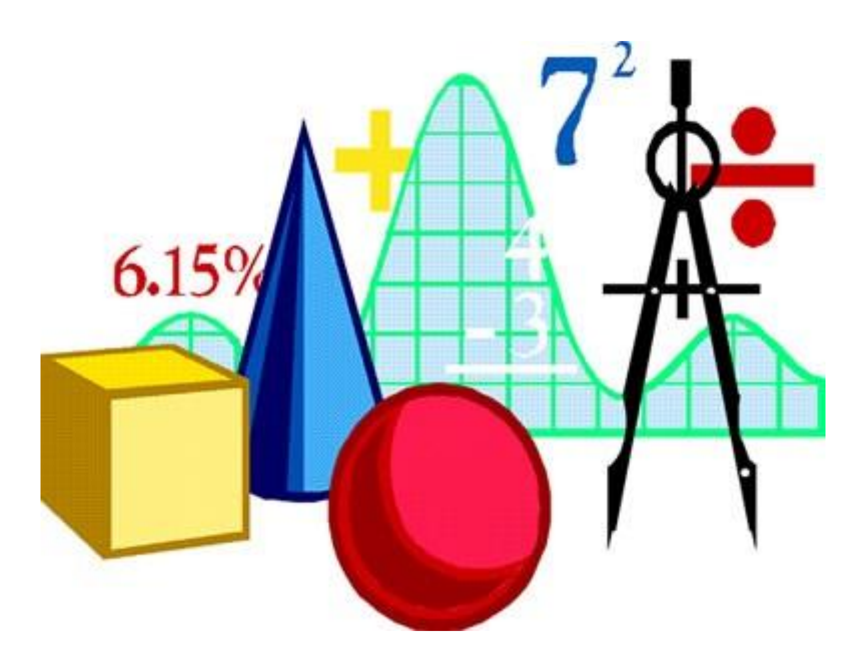
وتُسمّى أيضًا (postulats) هذه الحقائق الرياضية الأولى التي هي أصل كلّ برهان لاحق، تُسمّى: الأصول (definitions) ؛ يُضاف إليها التحديدات(axiomes) الأركان، أو الأوليّات، أو البديهيات، أو المسلّمات الرياضية، مثل تحديد النقطة والخطّ والزاوية... و 1+1=2 إلخ...

ويتّفق علماء الرياضيات المحدثون على أنّ هذه "الأصول"، على مختلف تسمياتها، هي مترادفة تقريبًا. وهي مفترضة صحيحة حتّى وإن كان يعوزنا البرهان على ذلك. وعلوم الرياضيات تقوم على هذه المسلّمات والتحديدات غير المبرهنة، التي هي قاعدة لكلّ برهان رياضي.

V. الأنظمة الهندسية:

ولكن لماذا يجب أن نقبل حقائق غير مبرهنة على أنّها صحيحة، بخاصةٍ في علم كالرياضيات، قائم كليًّا على البرهان؟

القدامى -أ



إزاء
هذه المسألة اعتبر علماء الرياضيات القدامى أنّ "البديهيات الأولى" في الرياضيات هي أفكار عامة أو حقائق قائمة بذاتها، مطلقة، أبدية، أزلية. وقد دافع عن هذا الرأي فيتاغوراس وأفلاطون، وأقليدس... وفي العصور الحديثة: ديكارت، وكانط وغيرهم... وقد كانت معادلة إقليدس الشهيرة أفضل مثال على هذه النظرة إذ قال: "من نقطة خارج خطّ لا نستطيع أن نقيم إلاّ خطًا واحدًا موازيًا لهذا الخطّ".

ب- المحدثون

أما
علماء الرياضيات المحدثون فاكتشفوا أنظمة هندسيّة جديدة لا تنطلق من مسلّمات أقليدس، بل من مسلمات أخرى مخالفة، بل مناقضة لمسلّمات أقليدس.



فالروسي لوباتشفسكي* (Lobatchevski)، قرّر أنّ: ((من نقطة خارج خط يمكن أن نقيم خطوطاً عدّة موازية لهذا الخط))

الهندسية اللاإقليدية الجديدة سمّاها لوباتشفسكي ((هندسة القطع الزائد))

* والألماني ريمان قرّر أنّ: ((من نقطة خارج خط لا يمكن أن نقيم أيّ خط مواز لهذا الخط))

ولكن ما هي أسباب هذا الخلاف حول هذه الحقيقة الواحدة؟

في
الواقع، ليس هناك ((حقيقة واحدة)). وليس هناك حقيقة مطلقة، بل هناك حقيقة نسبيّة خاصة بنظام هندسي معيّن. لأن ما كان يُعتقد أنّه حقيقة مطلقة (المسلّمات) عند أقليدس، أصبح في الرياضيات الحديثة يُعتبر حقيقة نسبيّة. فالخلاف هنا يدور حول مفهوم الفضاء (espace)

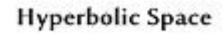
(homogène et infini) ((عند أقليدس الفضاء هو ((متجانس لا نهائي
(courbure negative) ((عند لوباتشفسكي الفضاء هو ((مقوّس سلبياً
(courbure positive)(عند ريمان الفضاء هو ((مقوّس إيجابياً)) (منفوخ

بناءً
على ذلك، فلنأخذ المسلّمة الخامسة من إقليدس: ((مجموع زوايا المثلث يساوي زاويتين قائمتين))، أو 180 درجة؛ ولنسألْ: أهذه المسلّمة صحيحة أم خاطئة؟

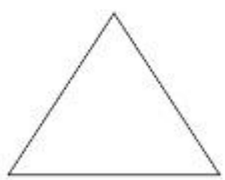


لا معنى له بالمطلق – (Poincaré) هذا السؤال – يقول بوانكريه.
فالجواب: إنها صحيحة إذا اعتمدنا نظام إقليدس. عند إقليدس= 180^0

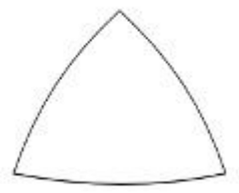
Euclidean Space



Elliptic Space







وإنها خاطئة إذا اعتمدنا أنظمة لاإقليدية
عند لوباتشفسكي هي أقل من 180^0
عند ريمان هي أكثر من 180^0
لذا قيل إنّ الرياضيات هي علم فرضي –استنباطي (hypothético-déductive)، أي أنّها تنطلق من مسلّمة هي مجرّد فرضيّة(وليست حقيقة مطلقة)، والنتيجة تكون صحيحة إذا كانت مستنبطة بشكل صحيح من هذه المسلّمة-الفرضيّة. فإذا غيّرنا الفرضيّة فإنّنا نكون ملزمين بتغيير النتيجة.

اكتشف هنري بوانكريه (Poincaré) أنّ في التفكير الرياضي نوعاً من الاستقراء (induction) سمّاه: ((التفكير بالشمول)) (raisonnement)، لأنه يقوم على تعميم نتيجة برهان خاص؛ وجعله يشمل كل الحالات المشابهة من غير أن يكون قد برهن على كل هذه الحالات، بل على بعضها فقط. وهذه الطريقة هي استقرائية، لا استنتاجية، لأنها تنطلق من الخاص الى العام. وهي شبيهة

بالطريقة التي يستخدمها الفيزيائي الذي يستخلص من مراقبة عدد محدود من الحوادث، قانوناً عاماً عن الطبيعة.

* ولكن ما هي الشروط لإيجاد، أو إختراع، نظام رياضي جديد؟

لقد أجاب عالم الرياضيات الألماني المعاصر هيلبرت (Hilbert) عن السؤال قائلاً: إنّ هناك ثلاثة شروط أساسيّة يجب تأمينها واحترامها، وهي أن تكون المسلّمات الجديدة المخترعة:

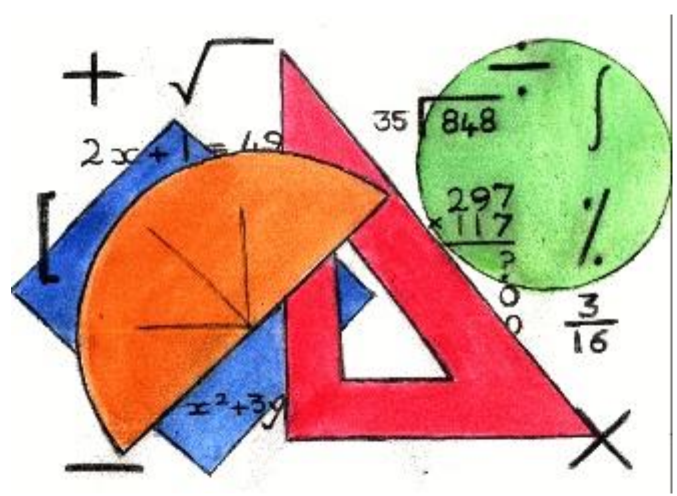
1- غير متناقضة مع بعضها البعض.

2- مستقلّة الواحدة عن الأخرى، أي أن لا تكون واحدة مستنبطة من أخرى، وإلاّ لما كانت مسلّمة (axiome)، بل مبرهنة (theorem).

3- أن تكون كافية، (لا ناقصة ولا زائدة)؛ أي الاكتفاء بالمسلّمات الضرورية وحدها.

خاتمة

لذلك
قيل إنّ عصرنا شهد سقوط المطلقات الرياضية القديمة. فالرياضيات ليست علماً نظرياً محضاً كما يُظن، بل هي علم عملانيّ، وليست عقيمة كالقياس المنطقي، بل خصيبة تضبط سائر العلوم الأخرى. فإذا كانت الحقيقة الرياضية هي توافق الفكر مع اختراعاته واصطلاحاته الرياضية، وإذا كانت الرياضيات نوعاً من ((اللوجستية (Logistique) (المنطلق الرمزي))، المعروف اليوم باسم التي وسّعها برتراند راسل (Bertrand Russell)،
فإنّ الأفكار الرياضية المجرّدة ليست منقطعة عن العالم، أي ليست إختراعاً لا غاية له، بل هي منغرسة في العالم اليوم أكثر من السابق. وإنها تسعى، مع العلوم الأخرى وبخاصة الفيزياء، إلى إعادة صياغة العالم صياغة عقليّة.



المصدر..لبنان
philomalek

****

بالتوفيق للجميع


أَسْتَغْفِرُ اللهَ وَأَتُوبُ إِلَيْهِ